ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.

1) Για την εξίσωση $f(x)=\sin x = 0$, $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$ να την μετατρέψετε σε μια ισοδύναμη μορφή σταθερού σημείου και να εξετάσετε εάν αυτή συγκλίνει $\forall x_0\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$.

ΛΥΣΗ

Έστω ο αλγόριθμος

$$x_{k+1} = x_k - \sin x_k,\ k=0,1,2,\dots \quad \left(\text{ώστε } x=\varphi(x) \Leftrightarrow f(x)=0\right)$$

Έστω $\varphi(x)=x-\sin x$, $\forall x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$

Εξετάζουμε εάν η φ είναι καλώς ορισμένη στο $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$.

$$\varphi'(x)=1-\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x=0$$

x	$-\pi/6$	0	$\pi/6$
$\varphi'(x)$	$+$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

άρα, η $\varphi \nearrow : [-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$

$$\varphi\left(\left[-\tfrac{\pi}{6},\tfrac{\pi}{6}\right]\right)=\left[\varphi(-\tfrac{\pi}{6}),\varphi(\tfrac{\pi}{6})\right]=\left[-\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{1}{2},\tfrac{\pi}{6}-\tfrac{1}{2}\right]\subseteq\left[-\tfrac{\pi}{6},\tfrac{\pi}{6}\right].$$

$\max\limits_{x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} |\varphi'(x)| = \lambda$ αρκεί το $\lambda<1$ ώστε να είναι συστολή

γενικά, $-1 \le \cos x \le 1 \overset{x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]}{\Longrightarrow} \frac{\sqrt3}{2} \le \cos x \le 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \le 1-\cos x \le 1-\frac{\sqrt3}{2} \Rightarrow |g'(x)| \le \underbrace{1-\frac{\sqrt3}{2}}_{\max\limits_{x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]}|g'(x)|} < 1$$

Άρα, η μέθοδος $x_{k+1}=x_k-\sin x_k$, $k=0,1,2\dots$ που επιλέξαμε συγκλίνει $\forall x_0\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$

2) Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \text{ο } b=\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 4\end{pmatrix}$$

Να επιλυθεί το σύστημα με τη μέθοδο της LU παραγοντοποίησης. $(Ax=b)$

ΛΥΣΗ

$$b_1=\begin{pmatrix}5\\ -\frac{8}{3}\\ \frac{19}{6}\end{pmatrix} \qquad b_2=\begin{pmatrix}5\\ -\frac{8}{3}\\ \frac{237}{90}\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3\to\gamma_3-\frac{1}{6}\gamma_1]{\gamma_2\to\gamma_2-\frac{1}{3}\gamma_1} \begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{23}{6}\end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_3\to\gamma_3-\frac{1}{5}\gamma_2} \begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & \frac{111}{30}\end{bmatrix}.$$

Άρα, $U=\begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & \frac{111}{30}\end{bmatrix}$ & $L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & 1 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & 1\end{pmatrix}$

$$Ax=b \Leftrightarrow LUx=b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly=b & (1)\\ Ux=y & (2)\end{cases}$$

$$(1) \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & 1 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -8/3\\ \frac{237}{90}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1=5\\ \frac{1}{3}y_1+y_2=-\frac{8}{3} \Rightarrow y_2=-\frac{13}{3}\\ \frac{1}{6}y_1+\frac{1}{5}y_2+y_3=\frac{237}{90} \Rightarrow y_3=\frac{234}{90}\end{cases}$$

$$(2) \sim \begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & \frac{111}{30}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -\frac{13}{3}\\ \frac{234}{90}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dots\dots\\ x_2=\dots\dots\\ x_3=\frac{234}{333}\end{cases}$$

3) Έστω συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\in[0,1] \\ 0, & x\in[1,3] \end{cases}$$

α. Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής της f κατά Lagrange & Newton στα σημεία 0, 1, 2, και 3.

β. Να βρεθεί επίσης το σφάλμα παρεμβολής

$$\max_{0\le x\le 3} |f(x)-p(x)|.$$

ΛΥΣΗ

x_i	0	1	2	3
f_i	1	0	0	0

α. Lagrange: $P_3(x)=\sum_{i=0}^{3} f(x_i)\,l_i(x) = f(x_0)\cdot l_0(x) = l_0(x) =$

$$= \prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{3} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) =$$

$$= -\frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x-6).$$

Newton:

x_i	f_i	$\Delta^1(x_i,x_{i+1})$	$\Delta^2(x_i,x_{i+1},x_{i+2})$	$\Delta^3(x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3})$
0	1	$\frac{0-1}{1-0}=-1$	$\frac{0+1}{2-0}=\frac{1}{2}$	$\frac{0-\frac{1}{2}}{3-0}=\frac{1}{6}$.
1	0	$\frac{0-0}{2-1}=0$	$\frac{0-0}{3-1}=0$	
2	0	$\frac{0-0}{3-2}=0$		
3	0			

$$P_3(x)=f(x_0)+\Delta^1(x_0,x_1)(f)(x-x_0)+\Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)(x-x_0)(x-x_1)+$$
$$+\Delta^3(x_0,x_1,x_2,x_3)(f)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=$$

$$= 1-1\cdot(x-0)+\frac{1}{2}(x-0)(x-1)+\frac{1}{6}(x-0)(x-1)(x-2)=$$

$$= 1-x+\frac{1}{2}(x^2-x)+\frac{1}{6}(x^2-x)(x-2)=$$

$$= -\frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x-6).$$

και προφανώς το πολυώνυμο παρεμβολής κατά Lagrange συμπίπτει με αυτό του Newton και αυτό διότι βάσει του θεωρήματος της Παρεμβολής, το πολυώνυμο παρεμβολής για δεδομένα σημεία διαμέρισης είναι μοναδικό.

β. ΠΡΟΣΟΧΗ το θεώρημα σφάλματος Lagrange

$$|f(x)-p_3(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(x)\cdot\prod_{i=0}^{3}(x-x_i)}{4!}\right|$$ ΔΕΝ εφαρμόζεται

διότι η f είναι μια δικλαδική συνάρτηση

(οπου δεν είναι $C^4([0,3])$ οπως απαιτείται).

Αρα, εχουμε να εκτελέσουμε την εξής διαδικασία:

$[0,1]$: $\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)-p_3(x)| = \max\limits_{0\le x\le 1}\left|1-x+\frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{11}{6}x-1\right| =$

$= \max\limits_{0\le x\le 1}\left|\frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{5}{6}x\right| = \max\limits_{0\le x\le 1}\frac{1}{6}\cdot|x^3-6x^2+5x|$ (*)

Εστω $g(x)=x^3-6x^2+5x$, $\forall x\in[0,1]$

$g'(x) = 3x^2-12x+5$

$g'(x)=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{84}}{6}$ $\to x_1 = 3.5275 \notin [0,1]$, $\to x_2=0.4725\in[0,1]$.

Η $g\in C([0,1])$ με $g(0)=0$

το $g(x_2)=1.1285>0$ και $g(1)=0$

(*) $\rightsquigarrow$ Αρα, $\frac{1}{6}\max\limits_{0\le x\le 1}|g(x)| = \frac{1}{6}\cdot g(x_2)=0.1881$

$[1,3]$: ομοια, βγαίνει οτι: $\max\limits_{1\le x\le 3}|f(x)-p_3(x)|=0.0645$.

Αρα, $\max\limits_{0\le x\le 3}|f(x)-p_3(x)| = \max\limits_{0\le x\le 3}\left\{\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)-p_3(x)|, \max\limits_{1\le x\le 3}|f(x)-p_3(x)|\right\} =$

$= 0.1881.$